# Ejercicios

**4.1.** Utilícese la definición de límite para comprobar que el límite es el indicado:

$$\text{a) } \lim_n \frac{1}{n^2+1} = 0, \quad \text{b) } \lim_n \frac{2n}{n+1} = 2, \quad \text{c) } \lim_n \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2},$$
$$\text{d) } \lim_n \frac{n+3}{n^3+4} = 0, \quad \text{e) } \lim_n \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}, \quad \text{f) } \lim_n (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}) = 0.$$

**4.2.** ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es $(a^n)$ una subsucesión de $(\frac{1}{n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2^n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2n-1})$?

**4.3.** Calcúlese, si existen, los siguientes límites:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad (2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}, \quad (3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3},$$
$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7}}, \quad (5)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad (6)\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$
$$(7)\ \lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}), \quad (8)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}},$$
$$(9)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad (10)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}, \quad (11)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}},$$
$$(12)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}\,\mathrm{sen}\ n^n}{n+1}, \quad (13)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}, \quad a,b>0,$$
$$(14)\ \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{2^n}, \quad b>0, \quad (15)\ \lim_{n\to\infty} (a^n+b^n)^{1/n}, \quad 0<a<b,$$
$$(16)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n}, \quad b>0, \quad (17)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}, \quad (18)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!},$$
$$(19)\ \lim_{n\to\infty} n^2 a^n, \quad (20)\ \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^2}, \quad (21)\ \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!},$$
$$(22)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**4.4.** Estudiar el límite de la sucesión

$$\Big(\frac{4+3}{1\cdot 3}, \frac{9-4}{2\cdot 4}, \frac{16+5}{3\cdot 5}, \frac{25-6}{4\cdot 6}, \dots\Big)$$

**4.5.** Calcular el límite de las sucesiones de término general:

$$(1)\ \frac{1}{n}\Big[\Big(a+\frac{1}{n}\Big)^2 + \Big(a+\frac{2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(a+\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big],$$
$$(2)\ \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}{(1+2+\cdots+n)^3}, \quad (3)\ \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+n+n^2+n^3},$$

(4) $\dfrac{3\sqrt[3]{n}-4\sqrt[5]{n}^2}{\sqrt[3]{n-3}(4-\sqrt[5]{n})}$, (5) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$,

(6) $\sqrt{4n^2-1}-(2n-1)$, (7) $\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2}$,

(8) $n\Big(\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{n}}-1\Big)$, (9) $\dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{n(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n^3-\sqrt{n}})}$,

(10) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{3n^2-1}-3n$, (11) $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt[3]{27n^3-5n^2}$,

(12) $(4n+3)\log\frac{n+1}{n-2}$, (13) $\Big(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+n}\Big)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$,

(14) $\Big(\dfrac{n+1}{n-1}\Big)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$, (15) $\Big(1+\log\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\Big)^{4n+1}$,

(16) $\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{\log(3/n)}}$, (17) $(2+3n^4)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}$,

(18) $\Big(\dfrac{\log(n^2+1)}{\log(n^2-1)}\Big)^{n^2\log n}$, (19) $\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}-n$,

(20) $\dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$, (21) $n\Big(\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\Big)^2$,

(22) $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$, (23) $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$,

(24) $\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}$, $\quad p\in\mathbb{N}$,

(25) $\dfrac{\cos 1+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-n}{\log(n^3+1)}$,

(26) $\dfrac{\sqrt{1\cdot2\cdot3}+\sqrt{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}}$,

(27) $\dfrac{\log 1-\log 2+\log 3-\cdots+\log(2n-1)-\log(2n)}{\log n}$,

(28) $\dfrac{\sqrt{2!}\tan\frac{1}{2}+\sqrt[3]{3!}\tan\frac{1}{3}+\cdots+\sqrt[n]{n!}\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$,

(29) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}}$, (30) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}$,

(31) $(2^n+3^n)^{1/n}$,

(32) $\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+1)}+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+2)}+\cdots+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+n)}$.

**4.6.** Hallar una relación entre $a$, $b$ y $c$ para que

$$\lim_n n^a \frac{(n+1)^b - n^b}{(n+1)^c - n^c}$$

sea real y distinto de cero. En ese caso, hallar dicho límite.

**4.7.** Discutir, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, la existencia y el valor de $\lim_n \frac{a^n+n}{a^{n-1}+2n}$.

**4.8.** Sea $u_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}$. Probar que existe $\lim_n u_n$ y está comprendido entre $1/2$ y $1$.

**4.9.** Hallar, si existe, el límite de la sucesión dada por $u_{n+1} = \frac{n}{2n+1} u_n$.

**4.10.** Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $x_1 > 1$ y $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $x_1 > 0$ y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $a > 0$.

d) $x_1 < x_2$ y $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$, $n \geqslant 3$.

e) $x_1 < x_2$ y $x_n = \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} y_{n-2}$.

**4.11.** Este ejercicio supone una aproximación de la prueba de la *Fórmula de Stirling*.

a) Probar que la sucesión

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$$

es estrictamente decreciente y converge a $e$. En consecuencia, $s_n > e$.

*Indicación:* Es más fácil mostrar que $(s_n^2)$ es decreciente.

b) Probar que la la sucesión

$$t_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$$

converge, mostrando que es decreciente y positiva. En consecuencia, existe una constante $C$ tal que

$$n! \sim \frac{C n^{n+1/2}}{e^n}$$

cuando $n \to \infty$. Este resultado se debe a De Moivre. Posteriormente, Stirling probó que $C = \sqrt{2\pi}$, así que

$$n! \sim \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}.$$

cuando $n \to \infty$.

**4.12.** Sea $(x_n)$ una sucesión. Probar que si existen $\lim_n x_{2n}$, $\lim_n x_{2n-1}$ y $\lim_n x_{3n}$, entonces existe $\lim_n x_n$ y coincide con los anteriores.

**4.13.** Demostrar que si $x_n \to l$, entonces $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to l$.

**4.14.** Calcular los límites superior y inferior de las sucesiones de término general:

a) $a + \dfrac{(-1)^n}{n}$, b) $(-1)^n + \dfrac{1}{n}$, c) $\dfrac{(-1)^n}{n} + 1 + (-1)^n$,

d) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$, e) $\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$, f) $\dfrac{2n + (-1)^n(n+2)}{3n+3}$,

g) $(-1)^n\left(3 + \dfrac{2n+1}{3n+2}\right)$, h) $a - n^{(-1)^n}$, i) $\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$,

j) $$s_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 4, \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y no es múltiplo de } 4, \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$